Dipartimento di Statistica Università di Bologna

Matematica Finanziaria
aa 2011-2012

lezione 23: 24 maggio 2012

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Criteri di valutazione per la prova d'esame

5 risposte esatte: 27

4 risposte esatte: 24

3 risposte esatte: 20

2 risposte esatte: 18

1 risposta esatta: 15

Interpolazione per i punteggi intermedi

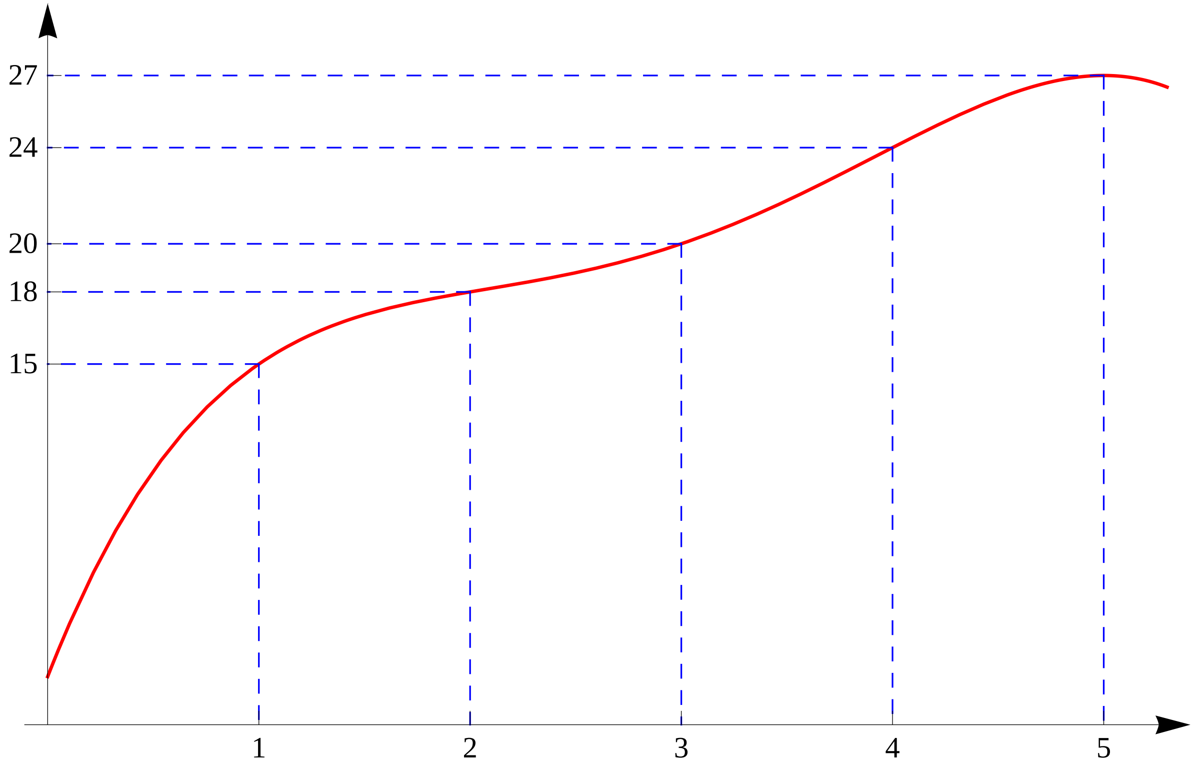

Figura 1: $f(x) = -\frac{x^4}{4} + 3x^3 - \frac{49x^2}{4} + \frac{45x}{2} + 2$

Un punto (x, y) del piano $\sigma\mu$ si dice *raggiungibile* se $x = \sigma$ e $y = \mu$ per qualche portafoglio. Tutti i punti ottenibili si trovano a destra di qualche punto della frontiera efficiente (naturalmente mettendo sempre il rischio in ascisse ed il rendimento in ordinate

Un punto (x, y) del piano $\sigma\mu$ si dice *raggiungibile* se $x = \sigma$ e $y = \mu$ per qualche portafoglio. Tutti i punti ottenibili si trovano a destra di qualche punto della frontiera efficiente (naturalmente mettendo sempre il rischio in ascisse ed il rendimento in ordinate

Definizione

Siano $P_1 = (\sigma_1, \mu_1)$, $P_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ due punti raggiungibili. Diciamo che P_1 **domina** P_2 se

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \quad \text{e} \quad \mu_1 \geq \mu_2$$

Un punto (x, y) del piano $\sigma\mu$ si dice *raggiungibile* se $x = \sigma$ e $y = \mu$ per qualche portafoglio. Tutti i punti ottenibili si trovano a destra di qualche punto della frontiera efficiente (naturalmente mettendo sempre il rischio in ascisse ed il rendimento in ordinate

Definizione

Siano $P_1 = (\sigma_1, \mu_1)$, $P_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ due punti raggiungibili. Diciamo che P_1 **domina** P_2 se

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \quad \text{e} \quad \mu_1 \geq \mu_2$$

Notare che P_1 ha minor rischio e maggior rendimento di P_2

Teorema

Ogni punto raggiungibile è dominato da un punto raggiungibile che si trova sulla frontiera efficiente di Markowitz. Pertanto ogni investitore che cerca di minimizzare il rischio per ogni rendimento atteso deve collocare il suo portafoglio sulla frontiera efficiente.

Esercizio Dimostrare che l'equazione della frontiera efficiente di un portafoglio di tre titoli $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ con valori attesi rispettivamente 2, 1 e 3, la cui matrice di covarianza è $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è $(\sigma_\mu, \mu) = \left(\sqrt{\frac{1}{11}\left(8\mu^2 - 30\mu + 35\right)}, \mu\right)$

Esercizio Dimostrare che l'equazione della frontiera efficiente di un portafoglio di tre titoli $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ con valori attesi rispettivamente 2, 1 e 3, la cui matrice di covarianza è $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è $(\sigma_\mu, \mu) = \left(\sqrt{\frac{1}{11}\left(8\mu^2 - 30\mu + 35\right)}, \mu\right)$

$$L(x, y, z; m, n) = x^2 + 2y^2 + 2yz + 3z^2 - m(x + y + z - 1) - n(2x + y + 3z - \mu)$$

Equazioni di punto critico

$$
\begin{cases}
2x = m + 2n \\
4y + 2z = m + n \\
2y + 6z = m + 3n \\
x + y + z = 1 \\
2x + y + 3z = \mu
\end{cases}
$$

Equazioni di punto critico

$$\begin{cases} 2x = m + 2n \\ 4y + 2z = m + n \\ 2y + 6z = m + 3n \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = \mu \end{cases}$$

Soluzione

$$x = \frac{\mu + 5}{11}, \quad y = \frac{14 - 6\mu}{11}, \quad z = \frac{5\mu - 8}{11}$$

Frontiera efficiente

$$\sigma^2 = 2\left(\frac{14}{11} - \frac{6\mu}{11}\right)^2 + 2\left(\frac{5\mu}{11} - \frac{8}{11}\right)\left(\frac{14}{11} - \frac{6\mu}{11}\right)$$

$$+ 3\left(\frac{5\mu}{11} - \frac{8}{11}\right)^2 + \frac{1}{121}(\mu + 5)^2$$

Frontiera efficiente

$$\sigma^2 = 2\left(\frac{14}{11} - \frac{6\mu}{11}\right)^2 + 2\left(\frac{5\mu}{11} - \frac{8}{11}\right)\left(\frac{14}{11} - \frac{6\mu}{11}\right) + 3\left(\frac{5\mu}{11} - \frac{8}{11}\right)^2 + \frac{1}{121}(\mu + 5)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{11}\left(8\mu^2 - 30\mu + 35\right)$$

Esercizio Dimostrare che l'equazione della frontiera efficiente di un portafoglio di tre titoli $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ con valori attesi rispettivamente 1, 1/2 e 2, la cui matrice di covarianza è $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è $(\sigma_\mu, \mu) = \left(\sqrt{\frac{1}{24} \left(23\mu^2 - 22\mu + 23\right)}, \mu \right)$

Esercizio Dimostrare che l'equazione della frontiera efficiente di un portafoglio di tre titoli $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ con valori attesi rispettivamente 1, 1/2 e 2, la cui matrice di covarianza è $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è $(\sigma_\mu, \mu) = \left(\sqrt{\frac{1}{24}\left(23\mu^2 - 22\mu + 23\right)}, \mu\right)$

$$\begin{aligned} L(x, y, z; m, n) = {} & x^2 + \frac{3xy}{2} + 3xz + 2y^2 + 2yz + 3z^2 \\ & - m(x + y + z - 1) - n\left(x + \frac{y}{2} + 2z - \mu\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{cases}
2x + \dfrac{3y}{2} + 3z = m + n \\
\dfrac{3x}{2} + 4y + 2z = m + \dfrac{n}{2} \\
3x + 2y + 6z = m + 2n \\
x + y + z = 1 \\
x + \dfrac{y}{2} + 2z = \mu
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{3y}{2} + 3z = m + n \\ \dfrac{3x}{2} + 4y + 2z = m + \dfrac{n}{2} \\ 3x + 2y + 6z = m + 2n \\ x + y + z = 1 \\ x + \dfrac{y}{2} + 2z = \mu \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 3y + 6z = 2m + 2n \\ 3x + 8y + 4z = 2m + n \\ 3x + 2y + 6z = m + 2n \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{16m+n}{17} \\ y = \dfrac{m-n}{17} \\ z = \dfrac{11(n-m)}{34} \\ x+y+z=1 \\ 2x+y+4z=2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{16m+n}{17} \\ y = \dfrac{m-n}{17} \\ z = \dfrac{11(n-m)}{34} \\ x+y+z=1 \\ 2x+y+4z=2\mu \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{16m+n}{17} \\ y = \dfrac{m-n}{17} \\ z = \dfrac{11(n-m)}{34} \\ \dfrac{16m+n}{17} - \dfrac{9m}{34} + \dfrac{9n}{34} = 1 \\ \dfrac{16m+n}{17} - \dfrac{n-m}{34} + \dfrac{11(n-m)}{17} = \mu \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{16m + n}{17} \\
y = \dfrac{m - n}{17} \\
z = \dfrac{11(n - m)}{34} \\
23m + 11n = 34 \\
11m + 23n = 34\mu
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{16m+n}{17} \\ y = \dfrac{m-n}{17} \\ z = \dfrac{11(n-m)}{34} \\ 23m + 11n = 34 \\ 11m + 23n = 34\mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7-3\mu}{4} \\ y = \dfrac{\mu-1}{6} \\ z = \dfrac{11(\mu-1)}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{16m+n}{17} \\ y = \dfrac{m-n}{17} \\ z = \dfrac{11(n-m)}{34} \\ 23m + 11n = 34 \\ 11m + 23n = 34\mu \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{7-3\mu}{4} \\ y = \dfrac{\mu-1}{6} \\ z = \dfrac{11(\mu-1)}{12} \end{cases}$$

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{16}(7-3\mu)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{\mu}{6}\right)(7-3\mu) + \frac{3}{4}\left(\frac{11\mu}{12}-\frac{11}{12}\right)(7-3\mu)$$

$$+ 2\left(\frac{1}{6}-\frac{\mu}{6}\right)^2 + 3\left(\frac{11\mu}{12}-\frac{11}{12}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}-\frac{\mu}{6}\right)\left(\frac{11\mu}{12}-\frac{11}{12}\right)$$

Esercizio Dimostrare che l'equazione della frontiera efficiente di un portafoglio di tre titoli $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ con valori attesi rispettivamente 2, 1 e 3, la cui matrice di covarianza è $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è $(\sigma_\mu, \mu) = \left(\sqrt{\frac{1}{20}\left(15\mu^2 - 50\mu + 59\right)}, \mu \right)$

Esercizio Dimostrare che l'equazione della frontiera efficiente di un portafoglio di tre titoli $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ con valori attesi rispettivamente 2, 1 e 3, la cui matrice di covarianza è $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è $(\sigma_\mu, \mu) = \left(\sqrt{\frac{1}{3}\left(2\mu^2 - 8\mu + 11\right)}, \mu\right)$

Esercizio Dimostrare che l'equazione della frontiera efficiente di un portafoglio di tre titoli $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ con valori attesi rispettivamente 1, 1/2 e 2, la cui matrice di covarianza è $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è $(\sigma_\mu, \mu) = \left(\sqrt{\frac{1}{176}\left(7\mu^2 - 14\mu + 183\right)}, \mu\right)$

Esercizio Dimostrare che l'equazione della frontiera efficiente di un portafoglio di tre titoli $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ con valori attesi rispettivamente 2, 1 e 3, la cui matrice di covarianza è $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ è $(\sigma_\mu, \mu) = \left(\sqrt{\frac{1}{96}\left(15\mu^2 - 90\mu + 167\right)}, \mu\right)$